

EXTENSÃO DO MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES PARA ESCOAMENTOS  
LAMINARES SOBRE PERFIS NÃO RETILÍNEOS

DJALMA RODRIGUES TEIXEIRA FILHO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE PROGRA  
MAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL  
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIENCIA ( M.Sc. )

Aprovada por :

Prof. Carlos Vieri de Silva

Prof. Guedes

Prof. C. F. de S. L. Filho

Junho de 1968 .

# INDICE

SUMARIO .....	2.
INTRODUÇÃO .....	4.
PARTE I - O PROBLEMA GENERALIZADO .....	6.
a. O Modelo Matemático .....	6.
b. Linearização pelo Método das Perturbações.	8.
c. Desenvolvimento das Cond. de Contorno.....	12.
d. Solução da Equação de Ordem Zero .....	13.
e. Solução da Equação de Prim. Ordem .....	13.
f. Descolamento da Camada Limite .....	18.
PARTE II - APLICAÇÃO A UM PERFIL COSSENOIDAL .....	19.
PARTE III - COMENTÁRIOS .....	26.
ANEXO I - .....	28.
ANEXO II - .....	31.
BIBLIOGRAFIA .....	42.

## SUMÁRIO -

Esta tese representa uma sistematização e uma aplicação do método de Poincaré-Lighthill-Kuo (PLK) para a solução de equações a derivadas parciais pelo desenvolvimento em série de funções. Pelo exposto fica evidente que o método das perturbações pode ser aplicado a um perfil "suave" qualquer.

Como orientação para a leitura dividimos o trabalho em duas partes. Na primeira fizemos um estudo generalizado e na segunda temos uma aplicação a um perfil cossenoidal. Há ainda uma terceira parte destinada a comentários e dois anexos contendo os programas e curvas determinadas por estes.

A principal utilidade de nossas conclusões será na Aerodinâmica de vez que faz parte de nossas hipóteses simplificadoras a suposição de um elevado número de Reynolds. A solução fica também restrita à primeira parcela perturbada que, em casos especiais (como ocorre na placa cossenoidal), pode ser na realidade a segunda parcela e assim por diante. Para ordens superiores torna-se necessário a introdução de uma distorção do sistema de coordenadas em função do parâmetro-perturbação o que não foi realizado por carencia absoluta de tempo.

De uma forma geral, para fácil assimilação, as conclusões encontradas podem ser encaradas como uma correção da solução de Blasius para a placa plana

em função da ordem de grandeza da perturbação.

Mais uma vez chamamos à atenção que, como é da própria essência do método, o perfil em estudo tem de ser "suave" (ou seja, suas derivadas tem que ser de pequeno valor ao longo de todo o perfil) caso contrário o que está exposto não se aplica.

Sob o ponto de vista matemático o problema consiste em uma linearização de um sistema de equações diferenciais (não linear) a derivadas parciais, pelo desenvolvimento em série de funções .

## INTRODUÇÃO -

Os métodos de linearização de equações diferenciais por uma expansão em série de funções e em termos de um parâmetro  $\epsilon$  considerado "pequeno" à priori, tem sua origem com o tratado de Poincaré "Les Méthodes Nouvelles de La Méchanique Celeste" (Paris, 1892). O método desenvolvido por Poincaré tratava essencialmente da expansão da variável dependente em termos do parâmetro  $\epsilon$ .

A grande deficiência deste processo é uma "transmissão amplificada" das singularidades da função expandida às parcelas de ordens mais elevadas.

Lighthill solucionou esta deficiência expandindo também as variáveis independentes em termos de potências de  $\epsilon$ .

Finalmente, Kuo aplicou este processo ao problema da placa plana e o método tomou então o nome de método de Poincaré-Lighthill-Kuo (PLK) (Maiores detalhes poderão ser encontrados em *Advances in Applied Mechanics* - IV - Academic Press - 1956 - págs. 281, 282, 283)

Uma outra característica destes estudos é que a camada-limite apresenta as funções do escoamento (gradiente de temperatura, tensão viscosa, etc) variando muito mais rapidamente ao longo da direção

transversa que ao longo da parede. Tal propriedade permite introduzir hipóteses simplificadoras que são essenciais para a determinação do gradiente de pressão ao longo do escoamento.

Não se fez um estudo sobre a convergência dos desenvolvimentos em série propostos pois partimos sempre da suposição que o fenômeno é fisicamente definido e neste caso a descrição matemática deve acompanhar a descrição física .

## PARTE I - O PROBLEMA GENERALIZADO

## a. O Modelo Matemático -



Seja o escoamento de um fluido sôbre um perfil curvilíneo "suave". As equações que descrevem o campo de velocidade assim formado são as de Navier-Stokes e da continuidade :

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

Vamos adimensionalizar as nossas variáveis introduzindo :

$$s^* = \frac{s}{\lambda} \quad n^* = \frac{n}{\lambda} \quad v^* = \frac{v}{U_\infty} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

onde  $\lambda$  = comprimento qualquer característico da superfície na direção do campo de velocidade do "free-stream".

$U_\infty$  = velocidade no "free-stream"

$\rho$  = massa específica do fluido em escoamento

Levando as novas variáveis nas equações anteriores obtem-se :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial s^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial n^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial s^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial n^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial n^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial n^*} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial n^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial s^*} + \frac{\partial v^*}{\partial n^*} = 0$$

$$\text{onde : } \Re = \frac{U_{\infty} \lambda}{\nu}$$

Vamos supor que  $\Re$  seja muito grande (ou seja, que  $\nu$  seja muito pequeno em comparação com o produto  $U_{\infty} \lambda$ ). Efetuando a nova transformação de variáveis :

$$\bar{s} = s^* \quad \bar{n} = a n^* \quad \bar{u} = u^* \quad \bar{v} = a v^* \quad \bar{p} = p^*$$

Obtem-se:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} + \frac{a^2}{\Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{n}^2} + \frac{1}{\Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2}$$

$$\frac{\bar{u}}{a} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{s}} + \frac{\bar{v}}{a} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} = - a \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{s}^2} + a \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{n}^2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} = 0$$

Colocando-se  $\alpha^2 = \Re$  vem que :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} + \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{n}^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{s}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{n}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} = 0$$



Como  $\Re$  foi suposto muito grande face aos valores presentes nas equações acima, poderia se reduzir o sistema a :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{n}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} = 0$$

A segunda equação indica que  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{s}}$  e esta expressão mostra que se pode calcular a variação de pressão  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}}$  em qualquer superfície  $\bar{n} = \text{constante}$ . Vamos então avaliar este gradiente de pressão no "free-stream":

Supondo o escoamento incompressível, ou seja, que  $\frac{d\rho}{ds} = 0$  será aplicável a equação de Bernoulli :

$$p = - \frac{\rho u_{\infty}^2}{2}$$

Consequentemente :  $\frac{dp}{ds} = -\rho u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{ds}$  e:

E como  $\bar{s} = \frac{s}{\lambda}$  virá que :  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} = -\bar{u}_{\infty} \frac{d\bar{u}_{\infty}}{d\bar{s}}$

Para o nosso problema, considerando-se o perfil de velocidade em  $s=0$  como sendo retangular as condições de contorno ficam sendo :

1.  $u(s,0)=0$  (velocidade nula junto ao perfil)
2.  $v(s,0)=0$  (idem)
3.  $u(s,\infty)=u_{\infty}(s)$  (velocidade no "free-stream")

b. Linearização pelo Método das Perturbações -

Introduz-se uma função-fluxo tal que  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{n}} = \bar{u}$  e  $-\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{s}} = \bar{v}$ . Desta forma a equação da continuidade estará automaticamente satisfeita. À seguir, à semelhança da solução de similaridade para a placa plana vamos colocar :

$\bar{\Phi}(\bar{s}, \bar{n}) = \bar{\Phi}(\bar{s}, \bar{\eta})$  onde  $\bar{\eta} = \bar{n} \bar{s}^{-1/2}$  e vamos admitir que se possa desenvolver  $\bar{\Phi}(\bar{s}, \bar{\eta})$  na forma abaixo :

$$\bar{\Phi}(\bar{s}, \bar{\eta}) = \bar{s}^{1/2} f(\bar{\eta}) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \bar{\Phi}_i(\bar{s}, \bar{\eta})$$

sendo  $\epsilon$  um parâmetro característico

da geometria da parede e tal que :

$$0 < \left( \epsilon = \frac{\bar{A}}{\lambda} \right) \ll 1$$

e  $\bar{A}$  é por sua vez um comprimento característico da direção transversa à de  $u_{\infty}$ .

Para esta mudança de coordenadas teremos

os operadores :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{n}} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{n}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}$$

Logo :

$$\bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{s}} = -\frac{1}{2} \bar{s}^{1/2} f'(\bar{\eta}) + \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} + \bar{s}^{1/2} f'(\bar{\eta}) \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}}$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{2\bar{s}^{1/2}} [f(\bar{\eta}) - \bar{\eta} f'(\bar{\eta})] - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right]$$

A expressão de  $\bar{u}$  seria :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{n}} = \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \bar{s}^{1/2} f'(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}$$

$$\bar{u} = f'(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}$$

As demais derivadas exigidas pela equação

seriam:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} = -\frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} f''(\bar{\eta}) - \frac{1}{2\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} + \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} f''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2} = \frac{1}{\bar{s}} f'''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^3}$$

Substituindo estas expressões na equação

primitiva obtem-se :

$$\begin{aligned} & \left( f'(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right) \left( -\frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} f''(\bar{\eta}) - \frac{1}{2\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{\eta}}{\bar{s}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} \right) \right) + \left( -\frac{1}{2\bar{s}^{1/2}} (f(\bar{\eta}) - \bar{\eta} f'(\bar{\eta})) - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right) \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} f''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} \right) = \frac{1}{\bar{s}} f'''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^3} - \frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

Efetuando os produtos de somatórios :

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} f'(\bar{\eta}) f''(\bar{\eta}) - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}^{3/2}} f''(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - \frac{f'(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} + \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} \right) - \frac{1}{2\bar{s}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{i+j} \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\eta}}{\bar{s}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} \right) - \frac{1}{2\bar{s}} f''(\bar{\eta}) (f(\bar{\eta}) - \bar{\eta} f'(\bar{\eta})) - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right) \\ & - \frac{1}{2\bar{s}^{3/2}} (f(\bar{\eta}) - \bar{\eta} f'(\bar{\eta})) \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{1}{\bar{s}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{i+j} \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{\eta}} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \\ & = \frac{1}{\bar{s}} f'''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^3} - \frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

Grupando os termos independentes de  $\epsilon$  e efetuando convenientemente as transformações dos somatórios obteve-se :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\bar{s}} f''(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) - \frac{1}{\bar{s}} f'''(\bar{\eta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \left[ -\frac{f'(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{\eta}} + \frac{f'(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} - \right. \\ & - \frac{1}{2\bar{s}} \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{\eta}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} \right) - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{s}} - \\ & \left. - \frac{f(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{1}{\bar{s}} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{s}} \right) - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{\eta}^3} \right] = -\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

Onde se tem  $\bar{\Phi}_0 = 0$  por convenção.

Vamos colocar :  $\bar{u}_{\infty}(\bar{s}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(\bar{s})$ , ou seja, vamos desenvolver  $\bar{u}_{\infty}$  em uma série de parcelas "perturbadas".

Se convencionarmos que  $\bar{u}_0 = 1$  então :

$$\bar{u}_{\infty}(\bar{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(\bar{s})$$

Logo :  $\frac{d\bar{u}_{\infty}}{d\bar{s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \frac{d\bar{u}_k}{d\bar{s}}$  e então :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} = - \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \frac{d\bar{u}_k}{d\bar{s}} \right] = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{k+j} \bar{u}_k \frac{d\bar{u}_j}{d\bar{s}} = - \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \sum_{k=0}^i \bar{u}_k \frac{d\bar{u}_{i-k}}{d\bar{s}}$$

Levando esta expressão na expressão anterior e comparando os termos na mesma potencia de  $\epsilon$  vem :

$$-\frac{1}{2\bar{s}} f''(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) - \frac{1}{\bar{s}} f'''(\bar{\eta}) = \bar{u}_0 \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{s}} \quad \text{e como } \bar{u}_0 = 1 : \frac{f''(\bar{\eta}) f(\bar{\eta})}{2} + f'''(\bar{\eta}) = 0$$

Esta seria a equação para a ordem zero. Para ordens superiores a zero obteve-se :

$$\begin{aligned}
& - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{s}} - \frac{f'(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} - \frac{1}{2\bar{s}} \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{\eta}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} \right) - \\
& - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{s}} - \frac{f(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{1}{\bar{s}} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{k-j}}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial \bar{s}} \right) - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_k}{\partial \bar{\eta}^3} = \\
& = \sum_{j=0}^k \bar{u}_j \frac{d\bar{u}_{k-j}}{d\bar{s}}
\end{aligned}$$

### c. Desenvolvimento das Condições de Contorno -

1.  $u(s,0)=0$  , e então  $\bar{u}(\bar{s},0)=0$

$$f'(0) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s},0) = 0$$

Vamos arbitrariamente obrigar a:

$$f'(0) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s},0) = 0$$

2.  $v(s,0)=0$  , e então  $\bar{v}(\bar{s},0)=0$

$$\bar{v} = - \frac{1}{2\bar{s}^{1/2}} \left[ f(\bar{\eta}) - \bar{\eta} f'(\bar{\eta}) \right] - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right] = \bar{v}_B(\bar{\eta}) - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{\eta}}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}} \right]$$

Onde  $\bar{v}_B(\bar{\eta})$  representa a velocidade transversal na solução de Blasius !

sal na solução de Blasius !

Vamos tomar  $\bar{v}_B(0)=0$  o que obriga a :

$$f(0) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{s}}(\bar{s},0) = 0$$

3.  $\bar{u}(\bar{s},\infty) = \bar{u}_{\infty}(\bar{s})$  donde :  $\bar{u}_{\infty}(\bar{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(\bar{s})$

$$f'(\infty) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s},\infty) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(\bar{s})$$

Vamos obrigar :

$$f'(\infty) = 1$$

$$\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s},\infty) = \bar{u}_i(\bar{s})$$

Como a nossa equação é de terceira ordem o

nosso problema fica determinado com o conhecimento destas três condições. Passemos então à solução das equações :

d. Solução da equação de ordem zero -

$$\text{Temos : } f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0 \quad \text{e : } \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f'(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Esta é a equação de Blasius cuja solução é de uso corrente. Vamos então para a seguinte :

e. Solução da equação de primeira ordem :

Temos :

$$\begin{aligned} -\frac{f'(\eta)}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \eta} + \frac{f'(\eta)}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s} \partial \eta} - \frac{1}{2\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{s} \partial \eta} \right) - \frac{f''(\eta)}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s}} - \\ - \frac{f(\eta)}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\bar{s}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \eta^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s}} - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_1}{\partial \eta^3} = \bar{u}_0 \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{s}} + \bar{u}_1 \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

Que, como  $\bar{u}_0 = 0$  e  $\bar{\Phi}_0 = 0$ , se reduz a :

$$-\frac{f'(\eta)}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \eta} + \frac{f'(\eta)}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s} \partial \eta} - \frac{f''(\eta)}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s}} - \frac{f(\eta)}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_1}{\partial \eta^3} = \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{s}}$$

Com as condições de contorno :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \eta}(\bar{s}, 0) = 0 \quad \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{s}}(\bar{s}, 0) = 0 \quad \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \eta}(\bar{s}, \infty) = \bar{u}_1(\bar{s})$$

Vamos buscar uma solução para esta equação na forma :

$$\bar{\Phi}_1(\bar{s}, \eta) = \int_0^\infty \bar{s}^{\lambda_n} f_n(\eta)$$

Substituindo esta expressão na nossa equação

ficaremos com :

$$\frac{f'}{2} \sum_0^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} f_n' - \frac{f'}{\bar{s}^{1/2}} \sum_0^{\infty} \lambda_n \bar{s}^{\lambda_n - 1} f_n' + \frac{f''}{\bar{s}^{1/2}} \sum_0^{\infty} \lambda_n \bar{s}^{\lambda_n - 1} f_n + \frac{f}{2\bar{s}^{3/2}} \sum_0^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n} f_n'' + \\ + \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \sum_0^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n} f_n''' = - \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{s}}$$

Ou seja :

$$\sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n' f_n' + \lambda_n f_n f_n'' + \frac{f f_n''}{2} + f_n''' \right\} \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} = - \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{s}}$$

As condições de contorno ficarão sendo :

1.  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s}, 0) = 0 \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n} f_n'(0) = 0 \quad \therefore f_n'(0) = 0$
2.  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{s}}(\bar{s}, 0) = 0 \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \bar{s}^{\lambda_n - 1} f_n(0) = 0 \quad \therefore f_n(0) = 0$
3.  $\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s}, \infty) = \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n} f_n'(\infty) = \bar{u}_1(\bar{s}) \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n - 1/2} f_n'(\infty) = \bar{u}_1(\bar{s})$

Consequentemente :

$$\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lambda_n - \frac{1}{2} \right) \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} f_n'(\infty)$$

Donde podemos escrever que :

$$\sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n' f_n' + \lambda_n f_n f_n'' + \frac{f f_n''}{2} + f_n''' \right\} \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lambda_n - \frac{1}{2} \right) \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} f_n'(\infty)$$

$$\sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n' f_n' + \lambda_n f_n f_n'' + \frac{f f_n''}{2} + f_n''' \right\} \bar{s}^{\lambda_n - 3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n'(\infty) \bar{s}^{\lambda_n - 3/2}$$

Comparando os termos de igual potencia em

$$\bar{s} \text{ vem : } \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n' f_n' + \lambda_n f_n f_n'' + \frac{f f_n''}{2} + f_n''' = \frac{1-2\lambda_n}{2} f_n'(\infty) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$(1-2\lambda_n) f_n' f_n' + 2\lambda_n f_n f_n'' + f f_n'' + 2f_n''' = (1-2\lambda_n) f_n'(\infty)$$

Introduzindo-se uma função  $\bar{F}_n(\bar{\eta}) = \frac{f_n(\bar{\eta})}{f_n'(\infty)}$  (e,

consequentemente admitindo-se que  $f_n'(\infty) \neq 0$ ) obteremos :

$$(1-2\lambda_n) f_n' \bar{F}_n + 2\lambda_n f_n'' \bar{F}_n + f \bar{F}_n'' + 2\bar{F}_n''' = (1-2\lambda_n) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Com as condições de contorno :

$$1. \quad \bar{F}_n(0) = \frac{f_n(0)}{f_n'(\infty)} = 0$$

$$2. \bar{F}_n'(0) = \frac{f_n'(0)}{f_n'(\infty)} = 0$$

$$3. \bar{u}_1(\bar{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{s}^{\lambda_n - 1/2}$$

$$\text{Como } \bar{u}_1(\bar{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(\infty) \bar{s}^{\lambda_n - 1/2} \text{ então : } f_n'(\infty) = C_n$$

Naturalmente :  $\bar{F}_n'(\infty) = 1$ , que é a terceira condição de contorno requerida .

Observamos que a equação ordinária acima apresenta uma solução assintótica tal que  $\lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \bar{F}_n'(\bar{\eta}) = 1$  pois:

Para valores de  $\bar{\eta}$  suficientemente grandes temos :

$$f'(\bar{\eta}) \simeq 1.$$

$$f''(\bar{\eta}) \simeq 0.$$

Consequentemente nossa equação, neste intervalo poderia ser escrita :

$$(1 - 2\lambda_n) \bar{F}_n'(\bar{\eta}) + f \bar{F}_n''(\bar{\eta}) + 2 \bar{F}_n'''(\bar{\eta}) = 1 - 2\lambda_n$$

Onde se tem obrigatoriamente :  $\bar{F}_n'(\infty) = 1$

$$\bar{F}_n'(\infty) = 1 \quad \text{se verificando assintoticamente}$$

te obriga a  $\bar{F}_n''(\infty) = 0$  e  $\bar{F}_n'''(\infty) = 0$  pois neste caso re-  
caímos em uma identidade  $1 - 2\lambda_n = 1 - 2\lambda_n$  o que evidencia a assintoticidade .

Chegamos então a uma solução ( até primeira ordem) com um alto grau de generalidade, ou seja, a solução proposta se aplica a um fluido escoando-se sobre um perfil de forma qualquer desde que :

1.0 perfil seja "suave"

2.0 perfil de velocidade de ataque ( $s=0$ ) seja retangular

3.  $R$  seja muito grande

4. A velocidade no inf. possa se escrever :



e os  $\bar{u}_i(\bar{s})$  por sua vez possam ser escritos :

$\bar{u}_i(\bar{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,i} \bar{s}^{-\lambda_{n,i} - 1/2}$  Chamamos a atenção que deste ponto em diante impõe-se uma solução numérica. Temos então um problema de condições de contorno (duas na origem e uma no infinito). Este problema foi resolvido com o programa relacionado no anexo 2 e que pode ser resumido como um processo de tentativa-e-erro em que se dispõe da subrotina RK3 (Runge-Kutta para um sistema de seis equações). Para valores inteiros de  $\lambda_n$  obtivemos para a terceira condição de contorno na origem :

$$F_0''(0) = -0.86$$

$$F_6''(0) = 6.18718087$$

$$F_1''(0) = 1.35465$$

$$F_7''(0) = 6.91274758$$

$$F_2''(0) = 2.637772$$

$$F_8''(0) = 7.60220427$$

$$F_3''(0) = 3.6759824$$

$$F_9''(0) = 8.26179557$$

$$F_4''(0) = 4.58717223$$

$$F_{10}''(0) = 8.89609563$$

$$F_5''(0) = 5.41655268$$

Ainda do computador e usando-se o plotador e o simulador analógico CSMP obteve-se a série de curvas para as funções  $F_n'(\bar{\eta})$  e  $F_n''(\bar{\eta})$  (anexo 1) e que ilustram a "asintoticidade" de nossas soluções, ou seja, que para valores de  $\bar{\eta}$  suficientemente elevados ( $\bar{\eta} = 8$  provou ser um limite bastante razoável, como se vê) então :

$$F_n(\bar{\eta}) \cong \bar{\eta} - b$$

onde  $b$  é uma constante.

$$F_n'(\bar{\eta}) \cong 1.$$

$$F_n''(\bar{\eta}) \cong 0.$$

Este método de perturbações (até a primeira ordem exige, como já vimos que as funções presentes possam ser expandidas em uma série de potências de  $\bar{s}$  (em última análise. Vide a expressão de  $\bar{\mu}_1(\bar{s})$ ). É fácil perceber que isto não seria sempre possível (à priori não podemos garantir a analiticidade das funções presentes). Contudo, será sempre possível nos aproximarmos destas expressões por uma série de potências inteiras de  $\bar{s}$  que multiplica um  $\bar{s}$  elevado a uma dada constante determinada à priori, ou seja, estaremos efetuando a expansão :

$$\bar{\mu}_1(\bar{s}) = \bar{s}^a \sum_{n=0}^{\infty} k_n \bar{s}^n$$

(à semelhança do que se faz no

método de Frobenius para a solução de equações ordinárias por meio de séries). Tivemos o cuidado de preparar uma subrotina (anexo 2) que realiza esta aproximação até uma ordem qualquer dentro das limitações do computador, pelo método dos mínimos quadrados.

Conforme sabemos das soluções em séries, quanto mais afastados estivermos de  $\bar{s}=0$  maior número de termos serão necessários para descrever o fenômeno o que impõe uma outra restrição ao método : valores grandes de  $\bar{s}$  (fique entendido que sendo  $\bar{s} = s/\lambda$ , ou seja, uma função da natureza geométrica da superfície este termo "grande" não pode ser avaliado sem o seu conhecimento).

Devemos ainda chamar à atenção que o processo ainda se indicaria para uma superfície apenas co-

nhecida por pontos (desde que seja "suave") pois poderíamos ajustar a estes pontos um polinômio pelo método acima exposto.

#### f. Descolamento da Camada Limite -

A Camada Limite irá se descolar quando a tensão entre o fluido e a parede se anular, ou seja, quando  $\tau_w = 0$ . Sabemos que :  $\tau_w = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ , portanto :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{U_\infty}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta^*} = \frac{U_\infty \sqrt{R}}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}}$$

Como  $\mu$ ,  $U_\infty$  e  $R$  são por hipótese diferentes de zero temos que no ponto de separação :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\bar{\eta}=0} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\bar{\eta}=0} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\bar{\eta}=0} = 0$$

Como  $\bar{u} = f'(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}}$ , então :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} = f''(\bar{\eta}) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2}$$

Se aproximarmos até os termos de primeira ordem vamos ter que (substituindo o desenvolvimento proposto para  $\bar{\Phi}_1$ ) :  $f''(0) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \bar{\eta}^2} (\bar{s}, 0) = 0$ ,  $i=1 \therefore$

$$\therefore f''(0) + \epsilon \sum_0^{\infty} \bar{s}^{\lambda_n - 1/2} f_n''(0) = 0$$

E o problema fica reduzido ao cálculo dos "zeros" de uma função polinomial em  $\bar{s}$ .

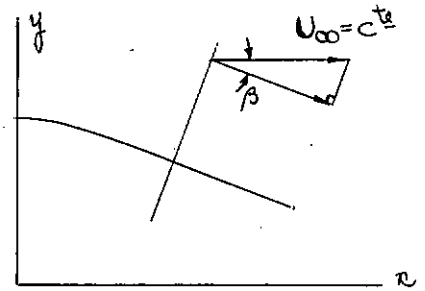
## PARTE II - APLICAÇÃO A UM PERFIL COSSENOIDAL

Seja o caso de um escoamento satisfazendo as restrições impostas e que se processa sobre uma placa de perfil cossenoidal cuja expressão analítica seja:

$$h(x) = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

onde  $A$  = amplitude e  $\lambda$  = comprimento de onda

As duas primeiras condições de contorno independem da natureza da superfície logo continuam a ser nulas para o presente estudo enquanto que a terceira condição passa a ser :



$$u(\bar{y}, \infty) = U_\infty \cos \beta \therefore \bar{u}(\bar{y}, \infty) = \cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \dots$$

$$\beta = \arctg [-h'(x)] = \arctg \left[ \frac{2\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right]$$

Vamos supor  $\epsilon = 0.10$  no máximo. Como  $\beta_{máx} = \arctg \left( \frac{2\pi A}{\lambda} \right)$

$\beta_{máx} \cong \arctg 0.628 \cong 0.56 \text{ rad}$  então  $\beta_{máx} \cong 0.56 \text{ rad}$  . Teremos para

este valor o erro ( aproximando  $\cos \beta$  por um polinômio do 4º grau) :

$$\epsilon_{no} = \cos 0.56 - \left( 1 - \frac{0.56^2}{2} + \frac{0.56^4}{24} \right) = -0.00003$$

Logo, poderemos para um valor máximo de  $\epsilon$  na ordem de 0.10 fazer a aproximação :

$$\cos \beta \cong 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!}$$

Como  $\beta = \arctg [-h'(x)]$  vamos desenvolver em série de potências (Tabelas da CRC - pág. 409)

$$\beta = [-h'(x)] - \frac{[-h'(x)]^3}{3} + \frac{[-h'(x)]^5}{5} - \frac{[-h'(x)]^7}{7} + \dots$$

$$\beta = -h'(x) + \frac{h'^3(x)}{3} - \frac{h'^5(x)}{5} + \frac{h'^7(x)}{7} - \frac{h'^9(x)}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde : } \bar{u} = \cos \beta &= \cos \left[ -h'(x) + \frac{h'^3(x)}{3} - \frac{h'^5(x)}{5} + \dots \right] \\ \cos \beta &\cong 1 - \frac{1}{2} \left[ -h'(x) + \frac{h'^3(x)}{3} - \frac{h'^5(x)}{5} + \dots \right]^2 + \frac{1}{24} \left[ -h'(x) + \frac{h'^3(x)}{3} - \frac{h'^5(x)}{5} + \dots \right]^4 \end{aligned}$$

Poderemos então escrever :

$$\cos \beta \cong 1 - \frac{h'^2(x)}{2} \left[ 1 - \frac{h'^2(x)}{3} + \frac{h'^4(x)}{5} - \dots \right]^2 + \frac{h'^4(x)}{24} \left[ 1 - \frac{h'^2(x)}{3} + \frac{h'^4(x)}{5} - \dots \right]^4$$

Como  $h'(x)$  é da ordem de  $\epsilon$ ,  $\cos \beta$  não terá termos de ordem ímpar em relação a  $\epsilon$ .

Voltando para a terceira condição de contorno :

$$\bar{u}(\bar{s}, \infty) = f'(\infty) + \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \sum_{u=1}^{\infty} \epsilon^u \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s}, \infty)$$

$$\bar{u}(\bar{s}, \infty) = 1 - \frac{h'^2(x)}{2} \left[ 1 - \frac{h'^2(x)}{3} + \dots \right]^2 + \frac{h'^4(x)}{24} \left[ 1 - \frac{h'^2(x)}{3} + \dots \right]^4$$

Fazendo-se  $h'(x) = \epsilon H(x)$   $\therefore H(x) = -2\pi i \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ , vem que (para que as condições de contorno sejam independentes entre si) :

$$\text{Ordem zero : } f'(\infty) = 1$$

Primeira ordem :  $\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\eta}} (\bar{s}, \infty) = 0 \therefore \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\eta}} (\bar{s}, \infty) = \bar{u}_1 = 0$

Segunda ordem :  $\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}} (\bar{s}, \infty) = -\frac{1}{2} H^2(\kappa) = \bar{u}_2$

Terceira ordem :  $\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_3}{\partial \bar{\eta}} (\bar{s}, \infty) = 0 \doteq \bar{u}_3$

Quarta ordem :  $\frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_4}{\partial \bar{\eta}} (\bar{s}, \infty) = \frac{3}{8} H^4(\kappa) = \bar{u}_4$

E assim por diante ...

Por outro lado vamos considerar  $\kappa/\lambda$  bastante pequeno para que se possa fazer :

$$\sin \frac{2\pi \kappa}{\lambda} \cong \sin \frac{2\pi \bar{s}}{\lambda} \cong \sin 2\pi \bar{s}$$

Pré - fixando-se um erro máximo tolerável :  
(erro absoluto) de 0.1 vê-se que o valor máximo possível de  $\bar{s}$  será função tanto de  $\epsilon$  como de  $\lambda$ .

$$S = \int_0^{\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \Delta}{\lambda}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}} dx$$

$$\bar{s} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\kappa} \sqrt{1 + 4\pi^2 \epsilon^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}} dx$$

Para um  $\lambda = 1.$ , pelo programa listado no anexo 2, foram obtidos :

$\epsilon$	$\bar{s}_{\text{máx}}$
0.10	0.355036
0.09	0.359931
0.08	0.375647
0.07	0.401431
0.06	0.457122
0.05	0.892999
0.04	1.392619

0.03	2.401704
0.02	4.400843
0.01	16.419234

Consequentemente, respeitados os intervalos acima indicados :  $\bar{u}_1(\bar{s}) = 0$

$$\bar{u}_2(\bar{s}) \cong -\frac{4\pi^2}{2} \sin^2 2\pi\bar{s}$$

$$\bar{u}_3(\bar{s}) = 0$$

$$\bar{u}_4(\bar{s}) \cong \frac{4\pi^4}{8} \sin^4 2\pi\bar{s} \cong 6\pi^4 \sin^4 2\pi\bar{s}$$

E assim por diante...

Como  $\bar{u}_1(\bar{s}) = 0$  obteremos para a solução de primeira ordem :

$$C_{n,1} = 0 \therefore f'_n(\infty) = 0 \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Desta forma não poderíamos trabalhar com pois isto implicaria em uma divisão por zero. Contudo vejamos a equação :

$$(1-2\lambda_n) f'_n f'_n + 2\lambda_n f_n f'' + f f_n'' + 2f_n''' = (1-2\lambda_n) f'_n(\infty)$$

que fica reduzida a :

$$(1-2\lambda_n) f'_n f'_n + 2\lambda_n f_n f'' + f f_n'' + 2f_n''' = 0$$

Com as condições de contorno :

$$f_n(0) = 0 \quad f'_n(0) = 0 \quad f'_n(\infty) = 0$$

$$n=0,1,2,\dots$$

A solução desta equação será evidentemente :

$$f_n(\bar{\eta}) = 0$$

$$n=0,1,2,\dots$$

Donde :  $\bar{\Phi}_1(\bar{s}, \bar{\eta}) = 0$

Da expressão geral de  $\bar{\Phi}_1(\bar{s}, \bar{\eta})$  temos que para este caso específico de  $\bar{\Phi}_1(\bar{s}, \bar{\eta}) = 0$  poderemos calcular a solução de 2ª ordem que terá por expressão :

$$-\frac{f'(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}} + \frac{f'(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} - \frac{1}{2\bar{s}} (0+0) - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{s}} - \frac{f(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}^2} - \\ - \frac{1}{\bar{s}} (0+0) - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}^3} = 0 + \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{s}} + 0$$

Ou seja :

$$-\frac{f'(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}} + \frac{f'(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{s} \partial \bar{\eta}} - \frac{f''(\bar{\eta})}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{s}} - \frac{f(\bar{\eta})}{2\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}^3} = \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{s}}$$

Com as condições de contorno :

$$1. \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s}, 0) = 0 \quad 2. \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{s}}(\bar{s}, 0) = 0 \quad 3. \frac{1}{\bar{s}^{1/2}} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \bar{\eta}}(\bar{s}, \infty) = \bar{u}_2(\bar{s})$$

Como esta expressão é em tudo semelhante à de primeira ordem anterior, poderemos propor o mesmo tipo

de desenvolvimento em série de funções que fornecerá :

$$(1-2\lambda_n) f_n' f_n' + 2\lambda_n f_n f_n'' + f f_n'' + 2f_n''' = (1-2\lambda_n) f_n'(\infty)$$

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n'(0) = 0$$

$$f_n'(\infty) = C_{n,2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como  $\bar{u}_2(\bar{s}) = -\frac{4\pi^2}{2} \sin^2 2\pi \bar{s}$  vamos desenvolver em

série de Taylor esta expressão em torno de  $\bar{s}_0 = 0$  :

$$\bar{u}_2(\bar{s}) = -\frac{4\pi^2}{2} \sin^2 2\pi \bar{s} \therefore \bar{u}_2(0) = 0$$

$$\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{s}}(\bar{s}) = -4\pi^3 \sin 4\pi \bar{s} \therefore \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{s}}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_2}{d\bar{s}^2}(\bar{s}) = -16\pi^4 \cos 4\pi \bar{s} \therefore \frac{d^2 \bar{u}_2}{d\bar{s}^2}(0) = -16\pi^4$$

$$\frac{d^3 \bar{u}_2}{d\bar{s}^3}(\bar{s}) = 64\pi^5 \sin 4\pi \bar{s} \therefore \frac{d^3 \bar{u}_2}{d\bar{s}^3}(0) = 0$$



Podemos ver que todos os termos da potencia impar de  $s$  serão nulos e ainda o termo independente será nulo. Podemos ainda formar a recorrência :

$$\frac{d^n \bar{u}_2}{d\bar{s}^n} = -16\pi^2 \frac{d^{n-2} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{n-2}} \quad n=3,4,5,\dots$$

Tomando apenas valores pares para  $n$  virá :

$$n=2m$$

$$\frac{d^{2m} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m}} = -16\pi^2 \frac{d^{2m-2} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m-2}} \quad m=2,3,4,\dots$$

$$\begin{aligned} \prod_{u=2}^m \frac{d^{2m} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m}} &= \prod_{u=2}^m \left[ -16\pi^2 \frac{d^{2m-2} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m-2}} \right] \\ \prod_{u=2}^m \frac{d^{2m} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m}} &= (-16\pi^2)^{m-1} \prod_{u=2}^m \frac{d^{2m-2} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m-2}} \end{aligned}$$

Simplificando esta expressão resulta que :

$$\frac{d^{2m} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m}}(\bar{s}) = (-16\pi^2)^{m-1} \frac{d^2 \bar{u}_2}{d\bar{s}^2}(\bar{s}) \quad \therefore \frac{d^{2m} \bar{u}_2}{d\bar{s}^{2m}}(\bar{0}) = (-1)^m 2^{\frac{4m}{\pi}} \frac{2m+2}{\pi}$$

Consequentemente :

$$\bar{u}_2(\bar{s}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{\frac{4m}{\pi}}}{m!} \frac{2m+2}{\pi} \bar{s}^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{s}^{2m}$$

Donde vem que :

$$C_n = f_n'(\infty) = (-1)^n \frac{2^{\frac{4n}{\pi}}}{n!} \frac{2n+2}{\pi} \quad n=1,2,3,\dots$$

Para  $n=0$  teríamos uma equação homogênea com condições de contorno homogêneas, logo :

$$f_0(\bar{\eta}) = 0$$

Os valores de  $\lambda_n$  correspondentes ao problema serão :

$$\bar{u}_2(\bar{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \bar{s}^{-\lambda_{n,2}-1/2} \quad \therefore \lambda_{n,2}-1/2 = 2n \quad \therefore \lambda_{n,2} = \frac{4n+1}{2}$$

Determinados  $C_{n,2}$  e  $\lambda_{n,2}$  o problema está resolvido pois se resume a interpolação de valores nos gráficos em anexo.

## PARTE III - Comentários -

Durante a solução numérica das equações diferenciais pudemos observar que aumentando-se a ordem da equação a resposta da mesma fica mais sensível a uma variação do valor da condição inicial arbitrada. Desta forma, enquanto que na equação de ordem zero apenas duas casas decimais no valor arbitrado para  $F''_0(0)$  foram suficientes para que  $\lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} F'_n(\bar{\eta}) = 1$ , já na equação de ordem 10 oito casas decimais permitiram apenas uma aproximação da verdadeira solução. Ficamos então limitados à esta ordem de  $n$  pela impossibilidade do computador 1130 de trabalhar com um maior número de casas decimais. Paralelamente, um infinito da ordem de 8. provou ser suficiente para que a assintoticidade se verificasse. Do ponto de vista prático poderemos considerar nossa condição  $F''_n(0)$  como sendo expressa por um número de oito casas decimais e ressaltando-se que para valores de  $\bar{\eta}$  superiores a 8. deva-se ter:

$$F'_n(\bar{\eta}) = 1$$

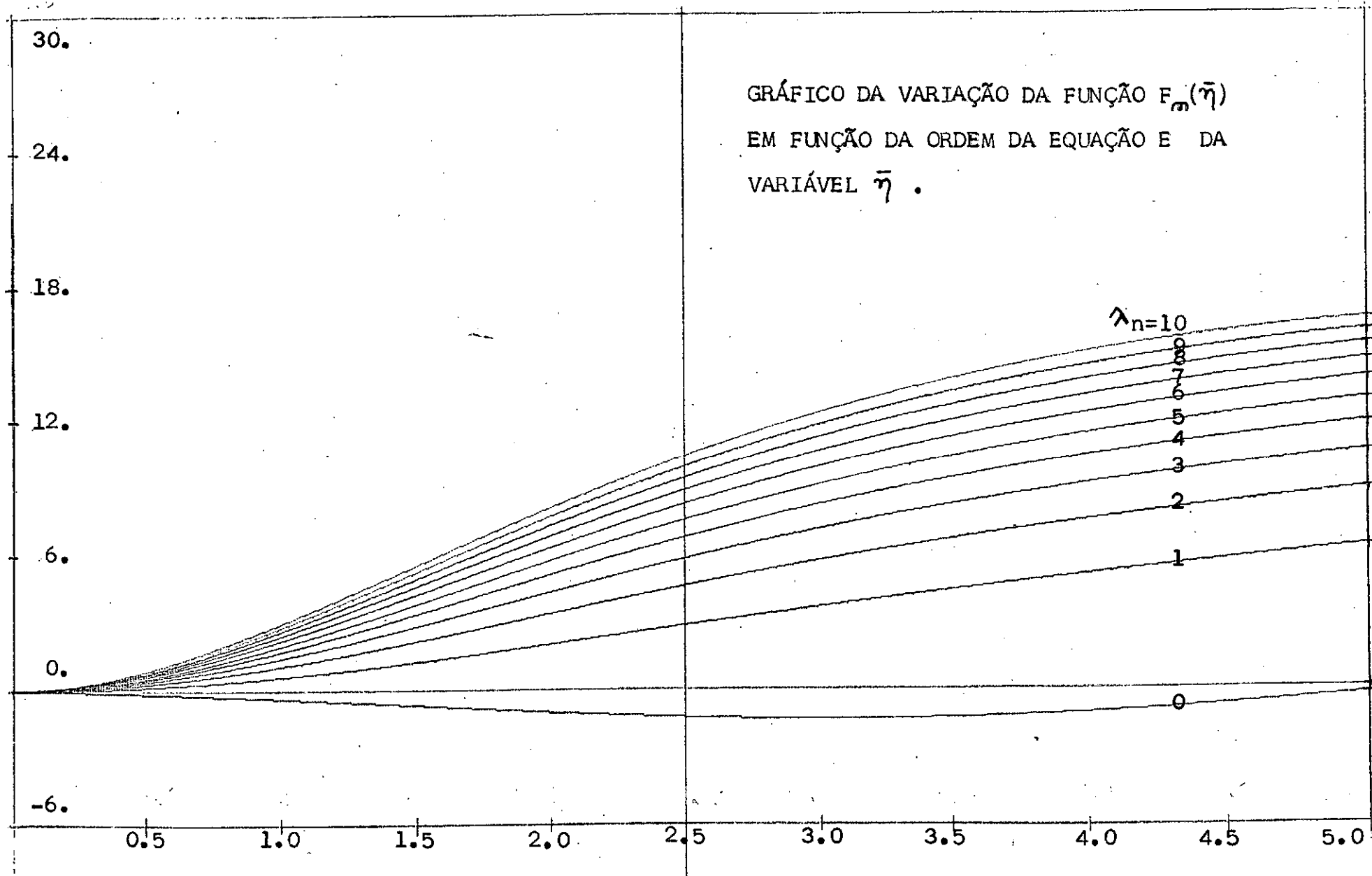
$$F''_n(\bar{\eta}) = 0$$

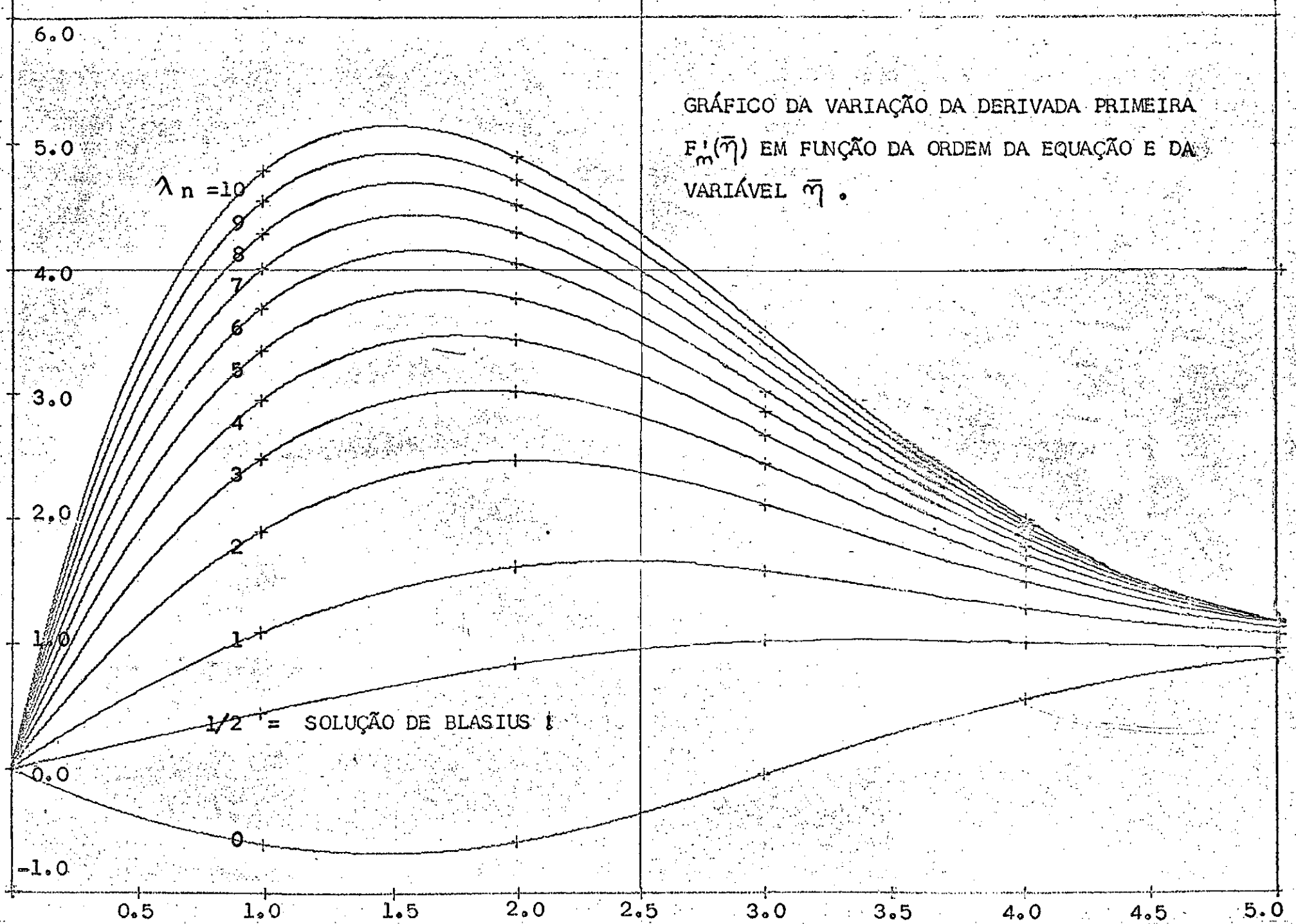
Esta colocação do problema é particularmente importante quando queremos (por exemplo) calcular o ponto de descolamento da camada limite. Neste caso não há interesse em trabalhar com um maior número de al

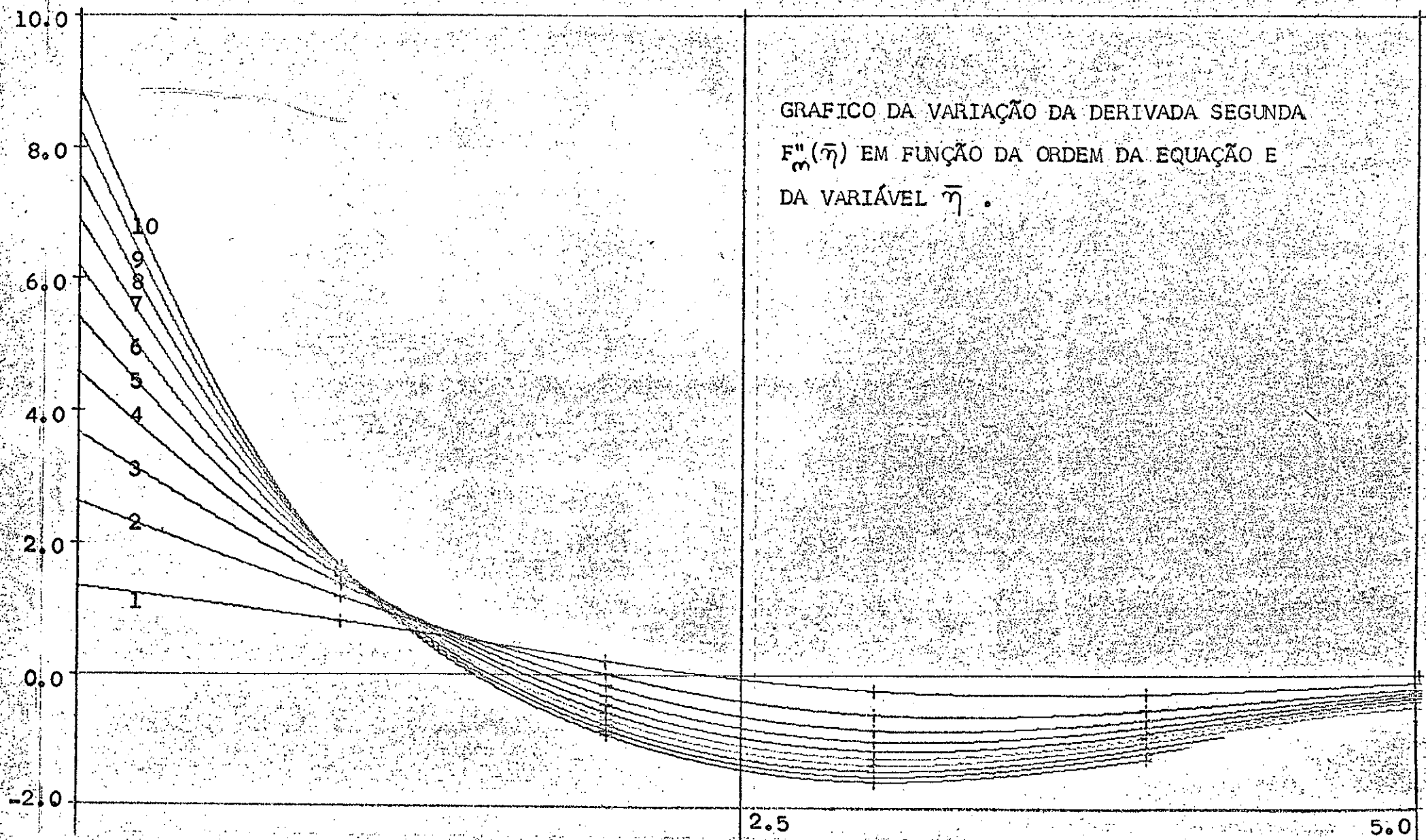
garismos significativos pois o erro cometido em se aplicar o método das perturbações é evidentemente superior a este limite de precisão .

Por outro lado, temos repetidamente nos referido à ordem (inteira) de  $F_n(\bar{\eta})$ . Convém chamar a atenção que  $F_n(\bar{\eta})$  não é propriamente uma função de  $n$  . Na realidade seria mais preciso (ou mais direto!) se dizer que  $F_n(\bar{\eta})$  é função de  $\lambda_n$  que por sua vez é uma função de  $n$  e notar  $F_{\lambda_n}(\bar{\eta})$ . Contudo a notação que utilizamos leva a vantagem de ser mais simples e unir a noção de dependencia com a ordem das funções  $F_n(\bar{\eta})$  em relação a série de funções proposta.

## ANEXO I - GRAFICOS OBTIDOS









## ANEXO II - PROGRAMAS UTILIZADOS

```

// JOB
// DUP
*DELETE          PACK1
*DELETE          PACK2
*DELETE          PACK3

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C SUBPROGRAMA PACK1
    FUNCTION BACK1(ETA,V1,V2,V3)
        BACK1=V2
    RETURN
END

// DUP
*STORE          WS   UA   BACK1

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C SUBPROGRAMA PACK2
    FUNCTION BACK2(ETA,V1,V2,V3)
        BACK2=V3
    RETURN
END

// DUP
*STORE          WS   UA   BACK2

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C SUBPROGRAMA PACK3
    FUNCTION BACK3(ETA,V1,V2,V3)
        BACK3=-(V1*V3)/2.
    RETURN
END

// DUP
*STORE          WS   UA   BACK3

```

```
// FOR
```

```
*IOCS(CARD,1132PRINTER)
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
C SOLUCAO DA EQUACAO DE PLASISUS. PARA UM DADO INFINIT
```

```
C PROGRAM/, PRINCIPAL
```

```
C COPPE-DUALMA RODRIGUES TEIXEIRA FILHO
```

```
EXTERNAL BACK1,PACK2,PACK3
```

```
DIMENSION AI(3),VAL(3,100),ETA(100).
```

```
N=R
```

```
NN=100
```

```
AI(1)=0.
```

```
AI(2)=0.
```

```
AI(3)=0.3
```

```
TOL=0.05
```

```
R=N/(10.*NN)
```

```
VI=0.
```

```
250 DC 13 J=1,100
```

```
13 ETA(J)=J*N/100.
```

```
CALL PK6(BACK1,PACK2,PACK3,R,VI,AI,10,100,VAL)
```

```
DO 333 J=1,100,10
```

```
333 WRITE(3,100)ETA(J),VAL(1,J),VAL(2,J),VAL(3,J)
```

```
100 FORMAT(4F25.10)
```

```
GO TO 300
```

```
300 IF(VAL(2,100)-1)400,400,500
```

```
400 IF(TOL-0.000001)800,800,450
```

```
450 AI(3)=AI(3)&TOL
```

```
WRITE(3,600)AI(3)
```

```
600 FORMAT(F10.7)
```

```
GO TO 250
```

```
500 AI(3)=AI(3)-TOL
```

```
TOL=TOL*0.1
```

```
AI(3)=AI(3)&TOL
```

```
WRITE(3,600)AI(3)
```

```
GO TO 250
```

```
800 FIM=1.
```

```
WRITE(3,750)AI(3)
```

```
750 FORMAT(' CONDICAO INICIAL CORRIGIDA=',F10.7)
```

```
CALL EXIT
```

```
END
```

```
// X50
```

```

// JOP
// DUP
*DELETE          DJ1
*DELETE          DJ2
*DELETE          DJ3
*DELETE          DJ4
*DELETE          DJ5
*DELETE          DJ6

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C      SUBPROGRAMA DJ1
      FUNCTION DJ1(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      DJ1=Y2
      RETURN
      END

// DUP
*STORE          WS  UA  DJ1

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      SUBPROGRAMA DJ2
      FUNCTION DJ2(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      DJ2=Y3
      RETURN
      END

// DUP
*STORE          WS  UA  DJ2

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      SUBPROGRAMA DJ3
      FUNCTION DJ3(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      DJ3=- (Y1*Y3)/2.
      RETURN
      END

// DUP
*STORE          WS  UA  DJ3

```

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      SUBPROGRAMA DJ4
      FUNCTION DJ4(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      DJ4=Y5
      RETURN
      END
```

```
// DUP
*STORE      WS  UA  DJ4
```

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      SUBPROGRAMA DJ5
      FUNCTION DJ5(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      DJ5=Y6
      RETURN
      END
```

```
// DUP
*STORE      WS  UA  DJ5
```

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      SUBPROGRAMA DJ6
      FUNCTION DJ6(X,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6)
      COMMON LAMDA
      PAR=(1.-2.*LAMDA)/2.
      DJ6=PAR-PAR*Y2*Y5-LAMDA*Y3*Y4-(Y1*Y6)/2.
      CALL OVERFL(IJ)
      GO TO (20,30,40),IJ
      20 WRITE(1,140)
      140 FORMAT(' CUIDADO,OVERFLOW!')
      40 DJ6=0.
      30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

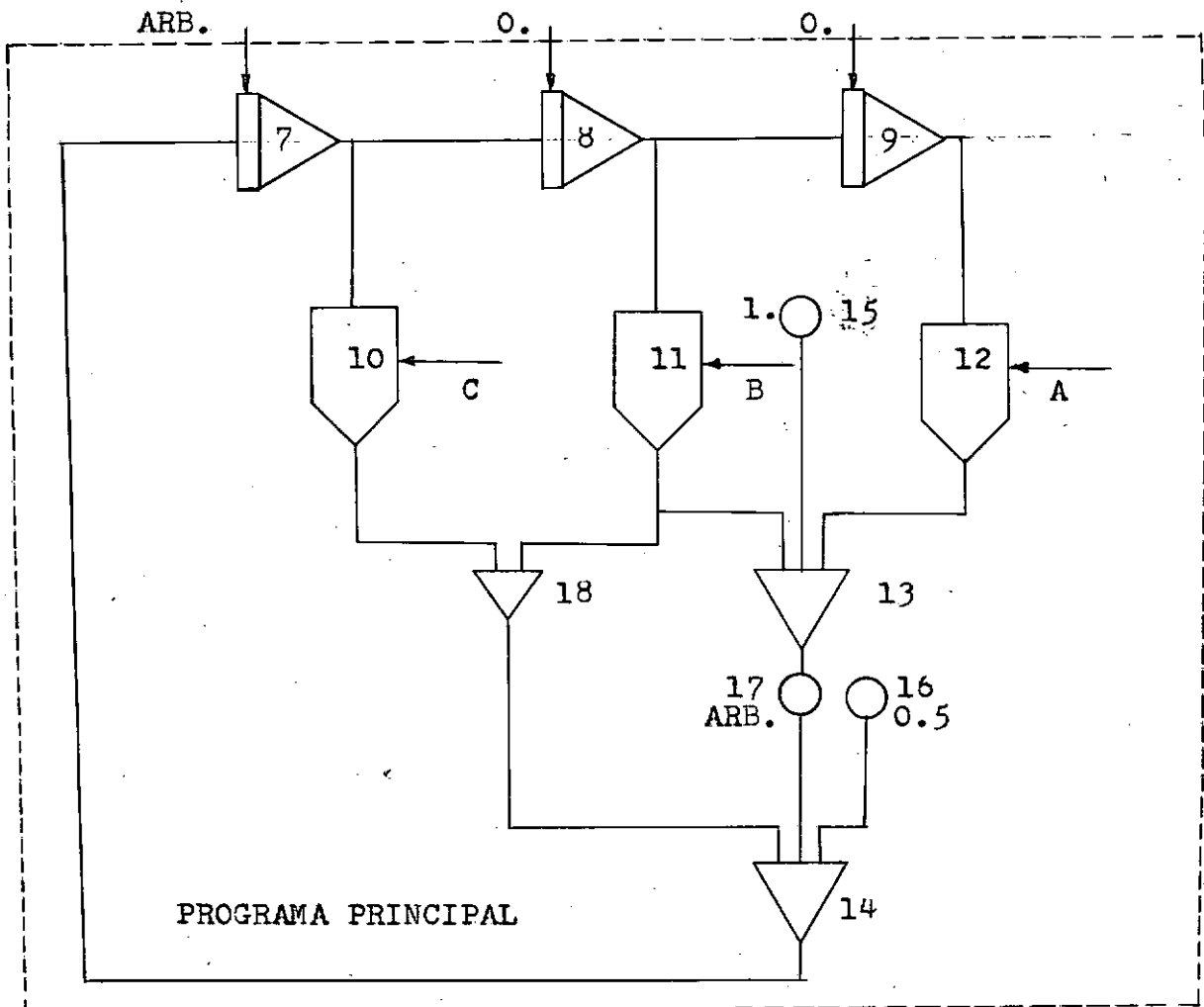
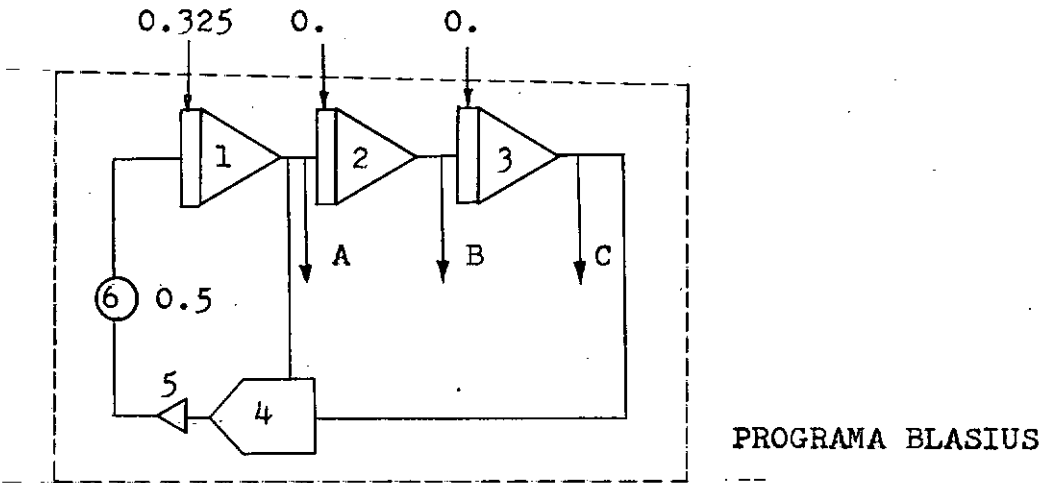
```
// DUP
*STORE      WS  UA  DJ6
```

```

// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD)
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
    EXTERNAL DJ1,DJ2,DJ3,DJ4,DJ5,DJ6
    DIMENSION YI(6),VAL(6,100)
    COMMON LAMDA
C   PROGRAMA QUE RESOLVE AS EQUACOES DE ORDEM N
C   UTILIZA-SE A SUBROTINA RK3
C   COPPE DJALMA TEIXEIRA
C   MAIO DE 1968
C   PROGRAMA PRINCIPAL
33  CONTINUE
    READ(6,100)ORDEM
100  FORMAT(F15.6)
    WRITE(3,110)ORDEM
110  FORMAT(' ORDEM DA EQUACAO EM ESTUDO=',F15.6)
    LAMDA=ORDEM
    XI=0.
    K=1
    H=0.08
    N=100
10  YI(1)=0.
    YI(2)=0.
    YI(3)=0.33209
    YI(4)=0.
    YI(5)=0.
    READ(6,120)YI(6)
120  FORMAT(F15.10)
    WRITE(3,125)YI(6)
125  FORMAT(' VALOR INICIAL ARBITRADO=',F15.10)
    CALL RK3(DJ1,DJ2,DJ3,DJ4,DJ5,DJ6,H,XI,YI,K,N,VAL)
    WRITE(3,130)((VAL(I,J),I=1,6),J=1,100,5)
130  FORMAT(6F12.3)
    CALL DATSW(1,IT)
    GO TO (10,50),IT
50  CONTINUE
    CALL DATSW(3,MMM)
    GO TO(33,34),MMM
34  CONTINUE
    CALL EXIT
END

```

DIAGRAMA DE BLOCO PARA O CSMP



// JOB

C       PROGRAMA CSMP

C       COPPE-DJALMA TEIXEIRA

C       MAIO DE 1968

// XEQ CSMP       2

\*LOCALCSMP,CSM0,CSM1,CSM2,CSM3,CSM4,CSM5,CSM6,CSM7,CSM8A,

\*LOCALCSM13,CSM9A,CSM9B

01	I	06	
02	I	01	
03	I	02	
04	X	01	03
05	-	04	
06	G	05	
07	I	14	
08	I	07	
09	I	08	
10	X	07	03
11	X	08	02
12	X	09	01
13	W	11	15
14	W	18	17
15	K		
16	V		
17	G	13	
18	W	10	11

01	0.33209
02	0.
03	0.
06	0.5
16	0.5
15	1.
17	0.
07	-0.86
08	0.
09	0.
13	-1.
14	1.
18	-0.5

1.
-1.
-0.5

1
1



```
// JOB
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C      SUBPROGRAMA DJAL
      FUNCTION DJAL(Z)
      COMMON PI, EPS
      DJAL=SQRT(1.+8*(2.*PI*EPS*SIN(2.*PI*Z))**2.)
      RETURN
      END
// DUP
*STORE      'S  UA  DJAL
```

```

// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD)
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C      COPPE-DUALMA TEIXEIRA
C      DETERMINACAO DO VALOR MAXIMO DA ARCISSA CURVILINEA
C      PRE-FIX/DO DE 0.1
C      COPPE-DUALMA TEIXEIRA
C      MAIO DE 1968
C      GERACAO DA FUNCAO SENO DE X
      REAL LAMB
      EXTERNAL DUAL
      COMMON PI, EPS
1 READ(6,250)A
250 FORMAT(F9.6)
      READ(6,280)LAMB

290 FORMAT(F9.6)
      EPS=A/LAMB
      WRITE(2,290)EPS
290 FORMAT(' VALOR DE A/LAMB ARBITRADO=',F9.6)
      X=0.
      H=0.01
      PI=3.14159
5 ARG=2.*PI*X/LAMB
      SINX=SIN(ARG)
C      GERACAO DA FUNCAO SENO DE S
      CALL SMPNS(DUAL,0.,X,0.0001,1000,SI1,S,N,IFR)
      ARG=2.*PI*S/LAMB
      SINS=SIN(ARG)
C      TESTE DO EPRO
      FRAPS=SINS-SINX
      EPRFL=FRAPS*100./SINX
      CALL OVERFL(J)
      GO TO(10,20,30),J
10 WRITE(2,295)
295 FORMAT(' CUIDADO,OVERFLOW!')
30 EPRFL=0.
20 CONTINUE
      Z=Y/LAMB

```

```
T=S/LAMB  
X=X&H  
IF(ABS(EPARS)-0.1)5,5,50  
50 WRITE(3,300)  
300 FORMAT(' ATINGIDO O VALOR LIMITE DE ERRO')  
WRITE(3,200)Z,T,EPARS,ERREL  
200 FORMAT(4(2X,F9.6))  
CALL DATSW(1,KK)  
  
GO TO(1,60),KK  
60 CONTINUE  
CALL EXIT  
END  
// XEQ
```

FOR

```

SUBROUTINE AMINQ(A,M,N,F,ETA,T)
DIMENSION P(60),T(1),F(1),ETA(1),QMAT(31,31)
CORPE - DJALMA TEIXEIRA - JUNHO DE 1968
NAO TRABALHAR COM VALOR ZERO PARA F QUANDO O VALOR DE A FOR INT
EIRO NEGATIVO
A E O EXPOENTE DO FATOR MULTIPLICATIVO
M E O GRAU DO POLINOMIO INTEIRO QUE DEVEVE SER MULTIPLICADO PELO
FATOR MULTIPLICATIVO X**A
N E O NUMERO DE LINHAS DO VETOR F E DO VETOR ETA
F E O VETOR QUE REPRESENTA O CONJUNTO DE VALORES DA VARIAVEL INDE
PENDENTE A SER AJUSTADO
ETA E O VETOR QUE REPRESENTA O CONJUNTO DE VALORES DA VARIAVEL
DEPENDENTE A SER AJUSTADA
T REPRESENTA O VETOR DOS COEFFICIENTES EM ORDEM CRESCENTE DAS
POTENCIAS DE X
A DIMENSAO DE T NO PROGRAMA PRINCIPAL E M+1
NM=M+1
MX2=2*M
FORMACAO DA MATRIZ QMAT
DO 13 II=1,MX2
P(II)=0.
DO 13 JJ=1,N
13 P(II)=P(II)+F(JJ)**(II+2.*A)
DO 20 III=1,NM
DO 20 JJJ=1,NM
K=III+JJJ-2
IF(K) 16,16,15
15 QMAT(III,JJJ)=P(K)
GO TO 20
16 XO=0.
DO 18 JM=1,M
18 XO=XO+F(JM)**(2.*A)
QMAT(1,1)=XO
20 CONTINUE
FORMACAO DOS TERMOS INDEPENDENTES
T(1)=0.
DO 63 I=1,M
63 T(1)=T(1)+F(I)**A
DO 17 IJ=2,NM
T(IJ)=0.
DO 17 JK=1,N
17 T(IJ)=T(IJ)+F(JK)**(IJ-1+A))*ETA(JK)
CALL APPAY(2,31,31,NM,NM,QMAT,QMAT)
CALL SIMQ(QMAT,T,NM,K5)
KSS=K5+1
GO TO (12,14),KSS
14 WRITE(3,550)
550 FORMAT(' CUIDADO, A MATRIZ DOS MINIMOS QUADRADOS E SINGULAR')
STOP

```

## BIBLIOGRAFIA -

- (1) - Advances in Applied Mechanics - IV  
Academic Press - 1956
- (2) - New Methods in Laminar Boundary Layer Theory  
D. Meksyn - Pergamon Press - 1961
- (3) - Heat and Mass Transfer  
Eckert - Drake - McGraw-Hill-Kogakusha
- (4) - Mecanica dos Meios Continuos  
Alberto Luís Coimbra - Livro Técnico
- (5) - FORTRAM - MONITOR - Principios  
Tércio Pacciti - Livro Técnico
- (6) - Introduction to Numerical Analysis  
Hildebrandt - McGraw-Hill
- (7) - C.R.C.  
Standard Mathematical Tables - The Chemical Rubber